Kansrekening 12-05-03

TOETS

1. a. Geef de definitie volgens A.N. Kolmororov van een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b. Definieer Benoulli-verdeling, binomiaal-verdeling, Poisson-verdeling, meetkundige verdeling en Laplace-verdeling en leg uit hoe die Kolmogorov kansruimtes definiëren.

We nemen in het vervolg aan dat Ω aftelbaar is en dat iedere deelverzameling van Ω tot de σ-algebra $\mathcal{A}$ behoort.

2. a. Gegeven $B \in \mathcal{A}$ met $P(B) > 0$ geef de definitie van voorwaardelijke kans $P(A|B)$.

b. Neem aan dat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een Laplace kansruimte is. Toon aan dat $A \mapsto P(A|B)$, $A \subset B$ een Laplace-verdeling is op B.

c. Een vaas bevat 3 rode en 2 witte ballen. Men trekt successievelijk 3 ballen zonder teruglegging. Gegeven dat de eerste getrokken bal rood is, en de tweede wit, wat is de voorwaardelijke kans dat de derde rood is ?

3. a. Gegeven een aftelbare partitie $\Omega = \cup_n \Omega_n$ van Ω in twee aan twee disjuncte deelverzamelingen met $P(\Omega_n) > 0$, geef de formule voor $P(A)$ in termen van de voorwaardelijke kansen $P(A|\Omega_n)$.

b. Gegeven zijn drie vasen. Vaas 1 bevat twee blauwe en vier rode ballen, vaas 2 bevat 4 blauwe en 2 rode ballen en vaas 3 bevat 2 blauwe en één rode bal. Eén van de vasen wordt op goed geluk gekozen en er wordt een bal uit getrokken. Wat is de kans dat de getrokken bal blauw is ?

4. a. Onder dezelfde voorwaarde als bij vraag 3, geef de formule van Bayes voor de kansen achteraf $P(\Omega_n|A)$.

b. Onder dezelfde voorwaarde als bij vraag 3, gegeven dat de getrokken bal blauw is, wat is de kans achteraf dat de gekozen vaas Vaas 3 is ?

5. a. Geef de definitie van onafhankelijke gebeurtenissen A en B in $\mathcal{A}$, en van onafhankelijke stochastische variabelen X en Y gedefinieerd op Ω.

b. Geef voorwaarden waaronder we hebben: $E(X+Y) = EX + EY$ en geef voorwaarden waaronder we hebben $E(XY) = EX\,EY$.

6. a. Zij X een stochastische variabele met een discrete verdeling op $\mathbb{Z}_+$. Geef de genererende functie g_X van de verdeling van X en geef uitdrukkingen voor EX en $\sigma^2(X)$ in termen van g_X.

b. Neem aan dat X een meetkundige verdeling heeft: $P(X = k) = pq^k,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Geef de genererende functe g_X en bereken met behulp hiervan EX en $\sigma^2(X)$.

7. a. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke stochastische variabelen zijn met genererende functies g_{X_1} en g_{X_2}. Geef een uitdrukking voor de genererende functie van $X = X_1 + X_2$.

b. Neem aan dat X_1 en X_2 Poisson verdelingen hebben met parameters λ_1 resp. λ_2. Toon aan dat $X = X_1 + X_2$ Poisson verdeeld is.

c. Toon aan dat de voorwaardelijke verdeling van X_1 gegeven $X = n$ een binomiaalverdeling is, $B(n, p)$, met een nader te bepalen parameter p.

Woonplaats: Goto PR Schame | Jaar van eerste inschrijving: 2002 | Naam docent: Thomas

(6, 3)

1a Een kansruimte is een tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ waarbij:
- Ω een verzameling, de uitkomstenruimte
- $\mathcal{A}$ een verzameling van deelverzamelingen van Ω die voldoet aan:
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ * $\emptyset \in \mathcal{A}$
  - $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ * $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$
- P een functie:
  $P: \mathcal{A} \to [0, 1]$
  die voldoet aan:
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A) = 1 - P(A^c)$
  - $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b Een Bernoulli-verdeling is een kansverdeling op $\{0, 1\}$ met $p(1) = p$ en $p(0) = q = 1-p$.
$\Omega = \{0, 1\}$ ✓
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$P = \begin{cases} 0 \mapsto 1-p \\ 1 \mapsto p \end{cases}$ dus $P(\Omega) = 1$ en $P(A) = 1 - P(A^c)$

Een binomiaalverdeling bestaat uit een serie van N Bernoulli-experimenten met gelijke succeskans p; we tellen hoe vaak de uitkomst 1 is. ?
$\Omega = \{0, 1, \ldots, N\}$ $p_k =$
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$P(\Omega) = 1$ omdat er nooit minder dan 0 enen zijn en nooit meer dan N, dus de kans hierop is 0.

Een Poissonverdeling is een verdeling op $\{0, 1, \ldots\}$ met $p(n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$, dus: ✓
$\Omega = \{0, 1, \ldots\}$
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$p(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$; uit het binomium van Newton volgt dat $P(\Omega) = 1$

Een meetkundige verdeling is een verdeling op $\{0, 1, \ldots\}$ met $p(n) = p \cdot (1-p)^k$, dus:
$\Omega = \{0, 1, \ldots\}$; $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$p(n) = p \cdot (1-p)^k$ ✓

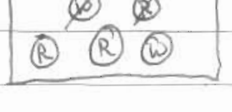
2a De voorwaardelijke kans $P(A|B)$ is de kans op A als we weten dat B optreedt; deze wordt gegeven door $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

b $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$; $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$; $A \cap B = A$

$A \mapsto P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{|A|}{|B|}$ ✓

Neem $\Omega_B = B$ dan geldt:

$A \mapsto P(A|\Omega_B) = \frac{|A|}{|\Omega_B|} = P(A)$ en dit is per definitie een Laplace-verdeling.

c 

Er zijn na de eerste trekking nog 2 rode en 1 witte bal, dus deze kans bedraagt $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

3a $P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \cap \Omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|\Omega_i)P(\Omega_i)$ ✓

b $p_i(B) = P(B|\text{vaas } i)$

vaas 1: 2B 4R $\rightarrow p_1(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(\text{vaas } 1) = \frac{1}{3}$

vaas 2: 4B 2R $\rightarrow p_2(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(\text{vaas } 2) = \frac{1}{3}$

vaas 3: 2B 1R $\rightarrow p_3(B) = \frac{2}{3}$; $P(\text{vaas } 3) = \frac{1}{3}$

$p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ ✓

4a $P(\Omega_n|A) = \frac{P(\Omega_n \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\Omega_n \cap A)}{\sum P(A|\Omega_i)P(\Omega_i)}$

b $P(\text{vaas } 3 | B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$ ✓

5a Gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ✓

Stochasten X en Y zijn onafhankelijk als $P(X=a \wedge Y=b) = P(X=a)P(Y=b)$ ✓

b $E(X+Y) = EX + EY$ vereist lineariteit van de verwachtingswaarde en die is per definitie altijd van toepassing. ✓ $E|X| < \infty$

$E(XY) = EX \cdot EY$ geldt mits X en Y onafhankelijk zijn. ✓

~~6a $g_x = \{0$ als $x \notin \mathbb{Z}_+$; p_x anders met $0 \le p_x \le 1$~~

~~$EX = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+} x g_x$; $\sigma^2(X) = E((X - EX)^2) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+} (x - EX)^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+} (x - \sum_{y \in \mathbb{Z}_+} y g_y)^2$~~

6b

6, 7 x X